**Université Paris7 - Denis Diderot — MT1**

# Examen du ⋯ Juin 2008

L'épreuve dure 3 heures. Les exercices sont indépendants. Une réponse ne vaut que si elle est démontrée par un argument précis et juste. Les documents, calculettes et téléphones sont interdits.

---

**Question de cours.** (1 point) Énoncer le théorème des accroissements finis.

---

**Exercice I.** (4 points) On considère les matrices

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $CB$ ; en déduire que $B$ est inversible.
2. Montrer que $A$ est inversible et déterminer son inverse $A^{-1}$.
3. Déterminer les matrices $M$ telles que
$$C\,M\,B = I_3\ .$$

---

**Exercice II.** (5 points) Soit $f$ la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
2. Calculer un développement limité de $f$ à l'ordre 2 quand $x$ tend vers 0 en étant différent de 0.
3. En déduire que $f$ se prolonge par continuité au point 0 en une fonction $\varphi$ que l'on précisera.
4. Montrer que $\varphi$ est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente en 0 au graphe de $\varphi$.
5. Étudier, au voisinage de 0, la position du graphe de $\varphi$ par rapport à sa tangente.

---

**Exercice III.** (10 points) Soit $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et

$$u_1 = (1,2,-2,-2)\,, \quad u_2 = (-1,2,0,1)\,, \quad u_3 = (0,5,-1,0)$$
$$u_4 = (1,-2,-1,-2)\,, \quad u_5 = (0,4,-2,-1)\,, \quad u_6 = (1,-6,1,-1)\,.$$

Soient $E$ l'espace vectoriel engendré par $\{u_1, u_2\}$ et $F$ l'espace vectoriel engendré par $\{u_4, u_5, u_6\}$.

1. Montrer que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Donner ses coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ et $t'$ dans la base $\mathcal{B}$.

3. i) Montrer que $v$ appartient à $E$ si et seulement si $z' = t' = 0$.
   ii) En déduire des équations de $E$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

4. Extraire de $\{u_4, u_5, u_6\}$ une base de $F$ ; donner un système d'équations de $F$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

5. i) Trouver une base de $E \cap F$.
   ii) En déduire le rang de $\{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\}$.
   iii) Retrouver ce rang par une méthode directe.